9. Unitarni prostori

(9.01) Opšti unutrašnji proizvod

Unutrašnji proizvod na realnom (ili kompleksnom) vektorskom prostoru $\mathcal{V}$ je funkcija koja preslikava svaki uređen par vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ u realan (ili kompleksan) skalar $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ takav da vrijede sljedeće osobine.

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ je realan, sa osobinama } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0, \text{ i } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \text{ akko } \boldsymbol{x} = 0,$$
$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \text{ za svaki skalar } \alpha,$$
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle,$$
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle} \text{ (za realan prostor, ovo postaje } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle).$$

Primjetimo da za svaku fiksiranu vrijednost od $\boldsymbol{x}$, druga i treća osobina kaže da je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ linearna funkcija po $\boldsymbol{y}$.

Bilo koji realan ili kompleksan vektorski prostor koji je opremljen sa unutrašnjim proizvodom se zove *unitarni prostor*. ◇

(9.02) Opšta CBS nejednakost

Ako je $\mathcal{V}$ unutrašnji proizvod, i ako postavimo da je $\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle}$, tada

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{V}.$$

Jednakost važi ako i samo ako $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ za $\alpha = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle / \|\boldsymbol{x}\|^2$. ◇

(9.03) Norme u unitarnom prostoru

Ako je $\mathcal{V}$ unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, tada

$$\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle} \quad \text{definiše normu na } \mathcal{V}.$$

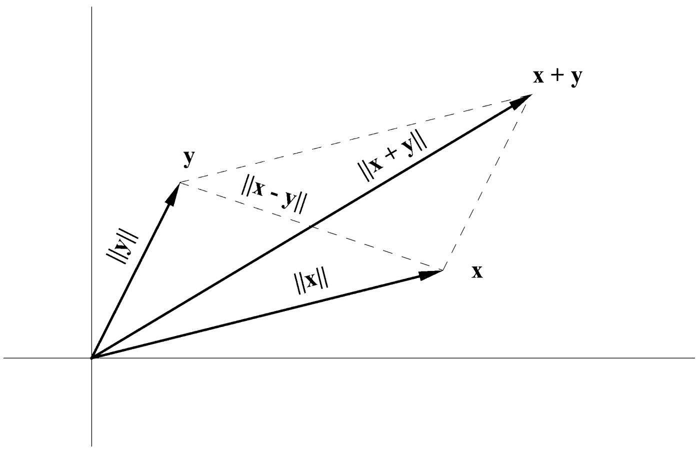
◇

(9.04) Jednakost paralelograma

Za datu normu $\| \star \|$ na vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, postoji unutrašnji proizvod na $\mathcal{V}$ takav da $\langle \star, \star \rangle = \| \star \|^2$ ako i samo ako važi *jednakost paralelograma*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$$

za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. ◇



(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Za $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ odrediti koji od sljedećih su unutrašnji proizvodi za $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_3y_3$

(b) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$

Rj. Unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava uređeni par vektora x, y u realni skalar $\langle x,y\rangle$ tako da važe sljedeće četri osobine

(i) $\langle x,x\rangle$ je realan takav da $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$,

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ za sve skalare α

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(iv) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

a) $\langle x,x\rangle = \underbrace{x_1x_1}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x_3x_3}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle = x_1^2 + x_3^2 \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $x_1^2+x_3^2=0$ akko $x_1=x_3=0$ akko $x=\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prema tome $\exists x\neq 0$ takav da $\langle x,x\rangle = 0$ (ZAŠTO?)

Dati proizvod nije unutrašnji proizvod.

b) $\langle x,x\rangle = \underbrace{x_1^2}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{x_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x_3^2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, Da li je $\langle x,x\rangle \geq 0$ $\forall x$.

Ako su koordinate x_1 i x_3 vektora $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ takve da $x_1^2+x_3^2 < x_2^2$ tada je $\langle x,x\rangle < 0$.

Dati proizvod nije unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^3$.

(#) Za dva daba vektora $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ odrediti koja od sljedeća dva proizvoda, su unutrašnji proizvodi ~~za~~ $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle x,y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3$

(b) $\langle x,y \rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$

Rj. Unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava uređeni par vektora x,y u realni skalar $\langle x,y \rangle$ tako da vrijede sljedeće četiri osobine

(i) $\langle x,x \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x,x \rangle \geq 0$ i $\langle x,x \rangle = 0$ akko $x=0$,

(ii) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

(iv) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ (za kompleksan vektorski prostor ova osobina glasi $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$).

a) (i)

$$\langle x,x \rangle = \underbrace{2x_1^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{x_2^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{4x_3^2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \qquad 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0$$

$\langle x,x \rangle = 0$ akko $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 0$ akko $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ akko $x = 0$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x, \alpha y \rangle = 2x_1 \alpha y_1 + x_2 \alpha y_2 + 4x_3 \alpha y_3 = \alpha (2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3) = \alpha \langle x,y \rangle$

vrijedi druga osobina

(iii)

$$\langle x, y+z \rangle = 2x_1(y_1+z_1) + x_2(y_2+z_2) + 4x_3(y_3+z_3) =$$

$$= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + 2x_1z_1 + x_2z_2 + 4x_3z_3 =$$

$$= \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$$

vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x,y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 = 2y_1x_1 + y_2x_2 + 4y_3x_3 = \langle y,x \rangle$

Dati proizvod jest unutrašnji proizvod

b) ZAVRŠITI ZA VJEŽBU (odgovor: nije unutrašnji proizvod).

(#) Za opšti unitarni prostor V, objasniti zašto svaka od sljedećih tvrdnji mora biti tačna.

(a) Ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za $\forall x \in V$, tada $y = \mathbf{0}$.

(b) $\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$ za $\forall x, y \in V$ i za svaki skalar α.

(c) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ za $\forall x, y, z \in V$.

Rj: Unutrašnji (skalarni) proizvod na kompleksnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava svaki uređen par vektora x, y u realan (ili kompleksan) skalar tako da vrijede sljedeće četri osobine:

(i) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ i $\langle x, x\rangle = 0$ akko $x = \mathbf{0}$,

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ za svaki skalar α

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,

(iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Svaki realni ili kompleksni vektorski prostor koji sadrži unutrašnji proizvod zovemo unitarni prostor.

a) Pokažimo da $\langle x, y\rangle = 0, \forall x \in V \Rightarrow y = \mathbf{0}$.

$\langle x, y\rangle = 0, \forall x \in V$

Ako za x uzmemo y imamo $\langle y, y\rangle = 0 \overset{(i)}{\Longrightarrow} y = \mathbf{0}$

b) $\langle \alpha x, y\rangle \overset{(iv)}{=} \overline{\langle y, \alpha x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \bar{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} \overset{(iv)}{=} \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$

c) $\langle x+y, z\rangle \overset{(iv)}{=} \overline{\langle z, x+y\rangle} \overset{(iii)}{=} \overline{\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle} =$

$= \overline{\langle z, x\rangle} + \overline{\langle z, y\rangle} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(#) Neka je V unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $<x,y>$. Objasniti zašto f-ja definisana sa $\|*\| = \sqrt{<*,*>}$ zadovoljava sljedeće dvije osobine norme

(i) $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ za svaki skalar α.

Rj. (i) Izaberimo proizvoljno $x \in V$

$$\|x\|^2 = <x,x>$$

$$\|x\| = \sqrt{\underbrace{<x,x>}_{\text{prema definicii unutrašnjeg proizvoda ovo je uvijek } \geq 0}} \Rightarrow \|x\| \geq 0.$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{<x,x>} = 0 \Leftrightarrow <x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(ii)

$$\|\alpha x\|^2 = <\alpha x, \alpha x> = \left| \begin{array}{l} \text{posmatramo realni} \\ \text{vektorski prostor } V \end{array} \right|$$

$$\overset{(ii)}{=} \alpha <\alpha x, x> \overset{(iv)}{=} \alpha <x, \alpha x> \overset{(ii)}{=} \alpha \cdot \alpha <x,x> =$$

$$= \alpha^2 <x,x> = \alpha^2 \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \text{za svaki skalar } \alpha.$$

(#) Za realni unitarni prostor sa $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, izvesti sljedeću nejednakost $\langle x, y \rangle \leq \dfrac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$.

Uputa: Posmatrati $x - y$.

Rj.

$$0 \leq \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle \overset{(iii)}{=} \langle x-y, x \rangle - \langle x-y, y \rangle =$$

$$\overset{(iv)}{=} \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle y, x \rangle}_{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

(#) Pokazati da je proizvod $\langle x, y\rangle = x^T y$ unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^n$.

Rj. Trebamo pokazati da vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x = \mathbf{0}$

$$\langle x,x\rangle = x^T x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $x^T x = 0$ akko $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 = 0$ akko $x = \mathbf{0}$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ za sve skalare α

$\langle x, \alpha y\rangle = x^T \alpha y = \alpha x^T y = \alpha \langle x, y\rangle$ vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x, z\rangle$

$\langle x, y+z\rangle = x^T (y+z) = x^T y + x^T z = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x,y\rangle = \langle y, x\rangle$ (za kompleksne prostore $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

$$\langle x,y\rangle = x^T y = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y^T x = \langle y, x\rangle$$

Standardni unutrašnji proizvod $\langle x,y\rangle = x^T y$ jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

(#) Neka je $A_{n\times n}$ nesingularna matrica. Pokazati da je
$$\langle x, y\rangle = x^T A^T A y$$
unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^n$.

Rj.
Trebamo pokazati da vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$

Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Primijetimo da je $Ax = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Isto tako $x^T A^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [c_1\ c_2\ \ldots\ c_n]$

$$\langle x,x\rangle = x^T A^T A x = [\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n}_{c_1}\ \ldots\ \underbrace{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n}_{c_n}] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $x^T A^T A x = 0$ akko $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$, $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$, $\ldots$, $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0$ akko
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je A nesingularna matrica jedino rješenje ovog sistema je trivijalno rješenje $x=0$. Vrijedi prva osobina.

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ za sve skalare α

$$\langle x, \alpha y\rangle = x^T A^T A(\alpha y) = \alpha(x^T A^T A y) = \alpha\langle x,y\rangle$$
vrijedi druga osobina

(iii) $<x, y+z> = <x, y> + <x, z>$

$$<x, y+z> = x^T A^T A (y+z) = x^T A^T A y + x^T A^T A z = <x, y> + <x, z>$$

vrijedi treća osobina

(iv) $<x, y> = <y, x>$ (za kompleksne prostore $<x, y> = \overline{<y, x>}$

$$<x, y> = x^T A^T A y = [c_1\ c_2 \dots c_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = y^T A^T A x = <y, x>$$

Prema tome $<x, y> = x^T A^T A y$ jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Napomena: Ovaj proizvod je poznat pod imenom A-unutrašnji proizvod ili eliptički unutrašnji proizvod.

Posmatrajmo vektorski prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica. Pokazati da je f-ja definisana sa

$$<A,B> = trag(A^T B)$$

unutrašnji proizvod za $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(Ovaj proizvod je poznat pod imenom standardni unutrašnji proizvod za matrice). $\boxed{trag(A) = \text{suma dijagonalnih elemenata matrice } A}$

Rj. Trebamo provjeriti da li vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $<A,A> \in \mathbb{R}$, $<A,A> \geq 0$ i $<A,A> = 0$ akko $A = \mathbf{0}$.

$$<A,A> = trag(A^T A) = trag\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2) + \dots + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{nn}^2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ij}^2}_{\in \mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$ i vidimo da $<A,A> = 0$ akko $A = \mathbf{0}$

vrijedi prva osobina

(ii) $<X, \alpha Y> = \alpha <X,Y>$ za svaki skalar α

$$<A, \alpha B> = trag(A^T \cdot \alpha B) = \alpha\, trag(A^T B) = \alpha <A,B>$$

vrijedi druga osobina

(iii) $<X, Y+Z> = <X,Y> + <X,Z>$

Primjetimo da je $trag(A^T B) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ (ZAŠTO?)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+\dots+a_{n1}b_{n1} & \square & \dots & \square \\ \square & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{n2}b_{n2} & & \square \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \square & \square & \dots & a_{1n}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$< A, B+C > = trag(A^T(B+C)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = trag(A^T B) + trag(A^T C)$$

$= < A, B > + < A, C >$ vrijedi treća osobina

(iv) $< x, y > = < y, x >$ (za kompleksan vekt. prost. $< x, y > = \overline{< y, x >}$)

ZA VJEŽBU

Data f-ja jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(#) Ako je V vektorski prostor svih neprekidnih realno-vrijednosnih f-ja definisanih na intervalu (a,b) pokazati da je tada

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

unutrašnji proizvod na V.

Rj. Pokažimo da vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle\geq 0$ i $\langle x,x\rangle=0$ akko $x=0$

$$\langle f,f\rangle=\int_a^b f(x)f(x)\,dx=\underbrace{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}_{\in\mathbb{R}}\geq 0$$ (ako ga tumačimo kao površina ispod krive)

$$\langle f,f\rangle=0\iff\int_a^b[f(x)]^2\,dx=0\iff f(x)=0\ \forall x\in(a,b).$$ vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$ za svaki skalar α

$$\langle f,\alpha g\rangle=\int_a^b f(x)\,\alpha g(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\alpha\langle f,g\rangle$$ vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$

ZA VJEŽBU

(iv) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ (za kompleksan vektorski prostor $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$)

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=\langle g,f\rangle$$

Dati proizvod jest unutrašnji proizvod na vektorskom prostoru V.

Opšta CBS nejednakost

Neka je V unitarni prostor, i neka je $\|*\| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$.
Pokazati da je tada

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{za sve } x, y \in V.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $y = \alpha x$ za $\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$.

Rj. Postavimo da je $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}$ (pretpostavićemo da je $\|x\| \neq 0$, jer u suprotnom nemamo šta dokazati) i posmatrajmo

$$\langle x, \alpha x - y \rangle.$$

$$\langle x, \alpha x - y \rangle = \langle x, \alpha x \rangle - \langle x, y \rangle = \alpha \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 - \langle x, y \rangle$$

Prema tome $\langle x, \alpha x - y \rangle = 0.$ $\quad \ldots (1)$

Sad imamo

$$0 \leq \|\alpha x - y\|^2 = \langle \alpha x - y, \alpha x - y \rangle = \langle \alpha x, \alpha x - y \rangle - \langle y, \alpha x - y \rangle$$

$$= \bar{\alpha} \underbrace{\langle x, \alpha x - y \rangle}_{\overset{(1)}{=} 0} - \langle y, \alpha x - y \rangle =$$

$$= - \langle y, \alpha x - y \rangle = \langle y, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle =$$

$$= \|y\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \cdot \langle y, x \rangle = \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\|x\|^2}$$

Kako je $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ slijedi da $\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|^2$

pa $0 \leq \dfrac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2} \implies |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

q.e.d.

Dokaz za jednakost ostavljamo kao zanimljivu vježbu.

Norma u unitarnom prostoru

Neka je V unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $\langle x, y\rangle$. Pokazati da f-ja

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$ definiše normu na V.

Rj. U jednom od prethodnih zadataka smo već pokazali da f-ja $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ zadovoljava sljedeće dvije osobine:

(i) $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ za svaki skalar α.

Prema tome da bi dokazali da data f-ja definiše normu na V ostaje nam još da pokažemo nejednakost trougla

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Primjetimo da je $\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle|$ i ... (1)

$$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} \leq |\langle x,y\rangle|. \quad \dots (2)$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle =$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \overset{(1)\,i\,(2)}{\leq}$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \overset{CBS}{\leq}$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Kako je $\|x+y\| \geq 0$, $\|x\| \geq 0$ i $\|y\| \geq 0$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

q.e.d.

(#) Opisati norme koje su generisane u sljedećim unitarnim prostorima:

(i) prostor $\mathbb{R}^n$, $<x,y> = x^T A^T A y$, gdje je $A_{n\times n}$ nesingularna

(ii) prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $<A,B> = trag(A^T B)$

(iii) prostor $\mathcal{C}(a,b)$, $<f,g> = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Rj.:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x^T A^T A x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\right)^2}\,.$$

(ii) $\forall A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \sqrt{<A,A>} = \sqrt{trag(A^T A)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \ldots + a_{nj}^2\right)}\,.$$

(iii) $\forall f \in \mathcal{C}(a,b)$

$$\|f\| = \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx} = \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

gdje su $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(#) Za $m\times n$ matrice A i B provjeriti da li vrijedi sljedeća nejednakost

$$trag(A^T B)^2 \leq trag(A^T A)\ trag(B^T B)$$

(za sve $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$).

Rj. Prisjetimo se CBS nejednakosti: <u>Ako je V unitarni prostor, i ako $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ tada $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ za $\forall x, y \in V$.</u>

Znamo da je $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ unitarni prostor u kojem je unutrašnji proizvod definisan sa $\langle A, B\rangle = trag(A^T B)$. Tada

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{trag(A^T A)}$$

$$\|A\|^2 = trag(A^T A)$$

$$\|B\|^2 = \langle B, B\rangle = trag(B^T B)$$

$$\langle A, B\rangle = trag(A^T B)$$

CBS nejednakost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ se može napisati u obliku $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ pa ako umjesto vektora x, y, stavimo matrice A i B iz unitarnog prostora $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ imamo

$$[trag(A^T B)]^2 \leq trag(A^T A)\ trag(B^T B)$$

q.e.d.

Posmatrajmo p-normu vektora $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, gdje je $p \geq 1$, $p \neq 2$, $p \neq \infty$. Dokazati da za ovakvu normu ne vrijedi jednakost paralelograma $\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$.

R: Jednakost paralelograma

Za datu normu $\|*\|$ na vektorskom prostoru V, postoji unutrašnji proizvod na V takav da $\langle *, * \rangle = \|*\|^2$ akko vrijedi jednakost paralelograma

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

za $\forall x, y \in V$.

Navedena teorema kaže da neka data norma može generisati unutrašnji proizvod t.d. $\langle *,* \rangle = \|*\|^2$ akko vrijedi jednakost paralelograma.

Da bi vidjeli da $\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$ ne vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ kada je $p \neq 2$, posmatrajmo $x = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i $y = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Nije teško izračunati $\|e_1 + e_2\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} = \|e_1 - e_2\|_p^2$ (zato što $\|e_1 + e_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$) tako da

$$\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2^{\frac{2}{p}} \cdot 2 = 2^{\frac{p+2}{p}} \quad i \quad 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2) = 4.$$

Jasno da $2^{\frac{p+2}{p}} = 4$ akko $\frac{p+2}{2} = 2$ akko $p = 2$.

Jednakost paralelograma ne vrijedi ni kada je $p = \infty$ (ovo ostavljamo kao zanimljivu vježbu).

Posljedica: Od svih p-normi jedino euklidova norma generiše unutrašnji proizvod tako da $\|*\| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$.

(#) Za proizvoljnu $n \times n$ realnu matricu B objasniti da li je sljedeća nejednakost tačna $|trag(B)|^2 \leq n(trag(B^T B))$.

Rj. Znamo da je $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ unitarni prostor u kojem je unutrašnji proizvod definisan sa $\langle A, B \rangle = trag(A^T B)$.

<u>CBS nejednakost</u>

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in V$$

Neka je $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. Tada

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = trag(A^T A) = n$$

$$\|B\|^2 = \langle B, B \rangle = trag(B^T B)$$

$$\langle A, B \rangle = trag(A^T B) = trag(B)$$

Kako je $|\langle A, B \rangle|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2$ to je

$$|trag(B)|^2 \leq n(trag(B^T B)).$$

q.e.d.

Zadaci za vježbu

1. Za proizvoljne $n \times n$ matrice A i B, objasniti zašto je svaka od sljedećih nejednakosti tačna

(a) $\operatorname{trag}(B^2) \leq \operatorname{trag}(B^T B)$ za sve realne matrice B.

(b) $\operatorname{trag}(A^T B) \leq \dfrac{\operatorname{trag}(A^T A) + \operatorname{trag}(B^T B)}{2}$ za realne matrice.

2. Objasniti zašto ne postoji unutrašnji proizvod na $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ takav da $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

3. Objasniti zašto Frobeniusova matrična norma

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{trag}(A^* A)}$$

na unitarnom prostoru $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ mora zadovoljavati jednakost paralelograma.

Upute:

1. a) koristiti CBS nejednakost, $A = B^T$, $\operatorname{trag}(B^T B) = \operatorname{trag}(B B^T)$.

b) iskoristiti rezultat jednog od prethodnih zadataka koji kaže da $2\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

2. jednakost paralelograma ne vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{C}^n$. Npr. za $x = e_1$, $y = e_2$ imamo $\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 2$ ali $2(\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2) = 4$.

3. Frobeniusova matrična norma na $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ je generisana pomoću standardnog matričnog unutrašnjeg proizvoda...